**切向量** 2020年12月23日10点08分

想象一下在欧几里得空间中的流形,例如单位球面.我们在点上的“切向量”是什么意思？在我们能够回答这个问题之前,我们必须在思考元素的方式上二分法.一方面,我们通常将它们视为空间中的点,其唯一属性是位置,由坐标表示.另一方面,在进行微积分时,有时我们会将其视为向量,它们是具有大小和方向但位置无关的对象.可以将向量(其中表示第个标准基向量\_可视化为箭头,其起始点在中的任意位置;从向量的角度来看,相关的只是它所指向的方向和长度.

我们真正想到的是在每个点上都单独复制.例如,当我们讨论在点处与球相切的向量时,我们会想象它们生活在的副本中,其原点已平移到.

**几何切线向量**

这是欧氏空间中切向量的初步定义.给定点,让我们定义在在处的**几何切线空间**,表示为,用集合表示为.中的**几何切向量**是的单个元素,其中.作为一种表示法,我们将缩写为(或者,如果更清晰,有时缩写,例如本身具有下标).我们将视为向量,其起始点位于(图3.1).集合是自然运算下的实向量空间

向量是的基.实际上,作为向量空间,与本质上相同.我们添加索引的唯一原因是,使得在不同点和处的几何切线空间和将是不相交的集合.

通过此定义,我们可以将位于的切空间认为是的特定子空间,即通过正交于径向单位矢量的向量空间.通过自然同构,使用从继承的内积.但是,此定义的问题在于,它对我们如何在不存在环境欧几里得空间的任意光滑流形上定义切向量没有任何提示.因此,我们需要寻找在流形上有意义的切向量的另一种表征.

到目前为止,在平滑流形上我们唯一需要处理的就是平滑函数,平滑映射和平滑坐标图.几何切向量提供了采用函数的方向导数的方法.例如,任何几何切向量都将产生映射,它在处沿方向取方向导数:

该操作在上是线性的,并且满足乘法规则:

如果是以标准基表达的,则根据链式规则可以更具体地写为

例如,如果,则

考虑到这种构造,我们进行以下定义.如果是的点,并且如果映射在上是线性的且满足下列乘法规则,则称是处的**导数**:

令表示在处所有导数的集合.显然,是下列操作下的向量空间

关于的最重要(也许有些令人惊讶)的事实是它是有限维的,并且实际上与我们上面定义的几何切线空间自然同构.该证明将基于以下引理.

引理3.1(导数的性质) 假设,并且.则

1. 如果f是一个常数函数,则.
2. 如果,则.

命题3.2 令

1. 对于任意几何切向量,由公式(3.1)定义的映射是在的导数.
2. 映射是从到的一个同构.(证明过程需要理解)

推论3.3 对于任意,由

定义的

构成了的一个基,因此具有维度.

**流形上的切向量** 2020年12月23日12点01分

现在我们可以在流形和带边界的流形上定义切向量.两种情况下的定义相同.令为有边界或无边界的光滑流形,令为的点.线性映射如果满足下列等式,则称为的**导数**

在处的所有导数的集合,用表示,是一个向量空间,称为与处的**切线空间**.的元素在处称为**切向量**.

引理3.4(流形上切向量的性质) 假设是一个有或没有边界的光滑流形,,并且.

1. 如果是一个常数函数,则.
2. 如果,则.

**平滑映射的微分** 2020年12月23日13点30分

如果和是带有或不带有边界的平滑流形并且是一个平滑映射,对于每个我们定义一个映射

称为F在处的**微分**(图3.3).给定,我们令为处的导数,其作用在上,

注意,如果,则,所以是有意义的.运算符是线性的,因为是线性的并且是的导数,因为对于任意,我们有

命题3.6(微分的性质) 令,和是有或没有边界的光滑流形,令和是平滑映射,令.

1. 是线性的.
2. .
3. .
4. 如果是一个微分同构,则是一个同构[isomorphism],且.

命题3.8 设为有或无边界的光滑流形,且.如果在的某个邻域上一致,则.

命题3.9(开放子流形的切线空间) 令为有或无边界的光滑流形,令为开放子集,令是一个包含映射.对于每个,微分是同构.

命题3.10(切线空间的维数) 如果是维光滑流形,则对于每个,切线空间是维向量空间.

接下来,我们需要证明具有边界的流形的相似结果.实际上,如果是一个带边界的流形,那么可能尚无法立即清楚地看到的边界点处的切线空间应该是什么样.它应该是维向量空间,例如内部点的切线空间吗？还是应该像边界一样是维？还是应该是维半空间,例如在局部模拟M的空间？

如下所示,定义意味着边界点的切线空间是维向量空间(图3.4),就像内部点的切线空间一样.这看起来或可能不是最几何上直观的选择,但是它的优点是使具有边界的流形上的大多数几何对象定义与流形上的定义完全相同.

首先,我们需要将点的切线空间和关联起来.由于不是的开子集,因此命题3.9不适用.作为替代,我们有以下引理.

引理3.11 令表示包含映射.对于任意,微分是同构的.

命题3.12(具有边界的流形上切线空间的维数) 假设是具有边界的维光滑流形.对于每个;是维向量空间.

假设V是一个有限维向量空间,令.就像我们之前在中所做的那样,对于任何向量,我们定义一个映射,

命题3.13(向量空间的切线空间) 假设是具有标准光滑流形结构的有限维向量空间.对于每个点,由公式(3.5)定义的映射是从到的规范同构,因此对于任何线性映射,下图换向:

图示, 示意图

描述已自动生成

命题3.14(乘积流形的切线空间) 令为光滑流形,对于每个,令是因子上的投影.对于任意点,映射

由下列定义

是一个同构.如果空间之一是具有边界的光滑流形,则同样如此.

再一次,由于同构性(3.7)是规范定义的,与坐标选择无关,我们可以将其视为规范标识,并且我们将始终这样做.因此,例如,我们用来标识,并将和视为的子空间.

**计算坐标** 2020年12月24日10点13分

首先,假设是一个光滑的流形(无边界),令是上的一个光滑坐标图.则,特别地,是从到开子集的微分同构.结合命题3.9和3.6(d),我们看到是一个同构.

根据推论3.3,导数构成了的基.因此,这些向量的原像在同构下构成的基础(图3.5).为了与我们尽可能将坐标映射视为标识的标准惯例保持一致,我们对这些向量使用符号,其特征在于以下表达式之一:

展开定义，我们看到通过下列公式作用于函数:

其中是的坐标表示,而是的坐标表示.换句话说,只是在的坐标表示中取的第个偏导数的导数.向量称为与给定坐标系关联的处的**坐标向量**.在标准坐标的特殊情况下,向量实际上是偏导数.

当是具有边界的光滑流形且是内部点时,上面的讨论逐字地适用.对于,唯一需要做的更改是用代替,但要理解,符号可以互换使用,以表示的元素或的元素,符合我们考虑同构的惯例.在这种情况下,第个坐标向量应该解释为单边导数.

命题3.15 令M为有边界或无边界的光滑流形,令.则是维向量空间,对于任意包含的光滑图,坐标向量构成的基.

因此,切向量可以写成唯一的线性组合

在这里我们像往常一样使用求和约定,将分母中的上标索引视为下表索引,如52页所述.有序基础被称为的**坐标基**,而数字被称为相对于坐标基的**分量**.如果已知,则可以根据其对坐标函数的作用轻松地计算其分量.对于每个,的分量由(在这里我们将视为上的光滑实值函数)给出,因为

坐标中的微分 2020年12月30日09点11分

接下来,我们探讨微分在坐标中的外观.我们首先考虑平滑映射的特殊情况,其中和是欧几里得空间的开放子集.对于任意的,我们将确定以标准坐标基的矩阵.使用表示域中的坐标,使用表示共域[codomain]中的坐标,我们使用链式规则来计算在典型基础向量上的作用,如下所示:

因此

换句话说,以坐标基形式的矩阵为

(回想一下,矩阵的列是基向量图像的组成部分.)这个矩阵就是在处的雅可比矩阵,它是总导数的矩阵表示.因此,在这种情况下,对应于总导数,根据我们对欧几里得空间及其切线空间的识别.如果是的开放子集,而是的开放子集,则适用相同的计算.

现在考虑光滑映射在带有或不带有边界的光滑流形之间的更一般情况.令分别是M,N的平滑坐标图,并分别包含,则我们获得新的坐标表达(图3.6).令表示的坐标表达.通过上述计算,相对于标准坐标基,由在处的雅可比矩阵表示.利用的事实,我们计算

因此,在坐标系中由的雅可比矩阵表示.实际上,微分的定义被精确地修饰以赋予雅可比矩阵独立于坐标的含义.

**坐标变换** 2020年12月30日10点42分

假设和是上的两个平滑图,并且.我们用代表的坐标,用代表的坐标.则点处的切向量既可以适用基表示,也可以用表示.两种表示形式有什么关系?

在这种情况下,习惯上写过渡映射以下列简写形式表示:

在这里,我们沉迷于一种典型的符号滥用方式:在表达式中,我们将视为一个坐标函数(其域是的一个开放子集）;但是我们认为代表一个点(在本例中为).通过公式(3.9),微分可以被写为

(见图3.7.)使用坐标向量的定义,我们获得

将其应用于向量的分量,我们发现的变换为

公式(3.11)到公式(3.12)需要借助高等线性代数教材的线性映射和矩阵定义来理解.

**切线束[tangent bundle]** 2020年12月30日11点46分

通常考虑流形所有点上所有切向量的集合是有用的.给定一个有或没有边界的光滑流形M,我们定义的**切线束**,用表示;即M上所有点处切线空间的不相交并集：

我们通常将此不相交并集的元素写为有序对,其中以及(而不是将点p置于第二位置,因为不相交并集的元素更常见地被编写).切线束配备了自然投影映射,它将中的每个向量发送到与之相切的点,.在标准注入v 7下，我们通常会犯下通常的轻微罪过，即用其图像识别TpM！ .p; v /，并将对T pM中的切向量使用任何符号.p; v /，vp和v； 取决于我们希望对点p给予多大的重视。

**命题3.18** 对于任意光滑的维流形,切线束具有自然的拓扑结构和平滑的结构,使其成为维的平滑流形.关于该结构,投影是光滑的.(**证明过程需看懂**)

命题3.20 如果是具有或不具有边界的光滑流形,并且可以被单个平滑映射覆盖,则对是微分同胚的. (**证明过程需看懂**)

命题3.21 如果是一个平滑映射,则其全局微分也是平滑映射. (**证明过程需看懂**)

**推论3.22(全局微分的性质)** 假设和是平滑映射.

1. .
2. .
3. 如果是一个微分同胚,则和同样也是微分同胚.

**曲线的速度向量** 2020年12月30日15点13分

中平滑的参数化曲线的速度从初等微积分中就很熟悉.它只是向量,其成分是曲线的成分函数的导数.在本节中,我们将此概念扩展到流形中的曲线.

如果是有边界或无边界的流形,我们将中的**曲线**定义为连续映射,其中是一个区间.(大多数时候,我们会对区域为开区间的曲线感兴趣,但出于某些目的,允许具有一个或两个端点是有用的;在这种情况下,通过考虑以下因素,对所有定义都有意义,只要稍作修改即可.J是有边界的流形,或者通过将导数解释为单边导数.)请注意,在本书中,曲线一词始终是指从区间到的映射(参数化曲线),而不仅仅是中的一组点.

现在让是一个有或没有边界的光滑流形.我们对切线空间的定义导致对速度向量的自然解释:给定平滑曲线和,我们定义在处的速度(图3.9)(用表示)是矢量

其中是中标准坐标基向量.速度的其他常见符号是

该切向量通过以下方式作用于函数

换句话说,是通过沿取函数的导数而获得的的导数.(如果是的端点,只要我们将关于的导数解释为单边导数,或者等效地解释为到的一个开放子集的任意导数,这仍然成立.)

现在令是具有坐标函数的平滑坐标图.如果,我们可以将的坐标表达写成,至少在足够接近的情况下,然后再将坐标公式取微分得到

这意味着的公式基本上与在欧几里得空间中的公式相同:它是切向量,其坐标为基础的分量是的分量函数的导数.

**命题3.23** 假设是有或没有边界的光滑流形,令.则每一个是中某些平滑曲线的速度.(**证明过程没看懂,需要一种更加明确的证明**)

命题3.24(复合曲线的速度) 令是一个平滑映射,并且令为平滑曲线.对于任意,合成曲线在的速度为

推论3.25(使用速度矢量计算微分) 令是一个平滑映射,,且.则

对于任意平滑曲线使得,且都成立.

学习总结:

剩余内容暂时跳过,有时间再补充.

切线空间和切向量的内容历经整整一个月，总算是彻底弄明白了。本章内容关于偏导算子的概念还不是很熟，需要结合流形微分几何一书反复学习和思考.